I Capacité numérique

- à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre nonlinéaire et faire apparaître l'effet des termes nonlinéaires.

II Modules

Au lieu d'utiliser la fonction `odeint`, on préférera la fonction `solve_ivp` du même module offrant davantage de possibilités (documentation), en particulier celle de déterminer les instants où certains évènements sont réalisés.

```
%matplotlib inline
```

La ligne précédente ne doit apparaître que dans les notebooks `Jupyter`, pas dans un fichier python.

```
import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt
```

III Période du pendule simple

III.1 Équation différentielle adimensionnée

On étudie l'exemple du pendule simple dont l'angle θ est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0,$$

avec $\omega_0^2 = g/\ell$. En introduisant la période des oscillations de faible amplitude $T_0 = 2\pi/\omega_0$, on définit la variable sans dimension $\tau = t/T_0$ pour réécrire l'équation sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} + (2\pi)^2 \sin(\theta) = 0,$$

On utilisera alors $\theta' = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$ comme « vitesse adimensionnée ».

III.2 Utilisation de `solve_ivp`

Comme avec `odeint`, on définit le système différentiel : attention, ici le temps doit être le premier argument.

```
def systdiff(tau,y):
    theta,thetaprime = y
    # d theta/d t = thetaprime
    # d thetaprime / dt = - sin(theta)
    return [thetaprime, - (2*np.pi)**2*np.sin(theta)]
```

Les arguments nécessaires de `solve_ivp` sont :

- la fonction `systdiff` comme avec `odeint`
- l'intervalle de temps sur lequel intégrer (inutile ici de définir le tableau des instants utilisés)
- les conditions initiales comme avec `odeint`

On va de plus utiliser ici l'argument `events` qui permet, au cours de l'intégration, d'identifier certains évènements (caractérisés par la nullité d'une fonction de l'instant `t` et de l'état `y` du système) et d'y arrêter ou non le calcul (avec l'option `terminal`).

L'appel à `solve_ivp` retournera :

`t` les instants utilisés (déterminés par l'algorithme)

`y` les valeurs de la solution à ces instants

`t_events` les approximations des instants de réalisations des évènements recherchés

`y_events` les valeurs de la solution à ces instants

III.3 Période du pendule simple

On utilise les passages par $\theta = 0$ avec $\dot{\theta} > 0$ pour calculer la période des oscillations.

```
def passage_origine(tau,y):
    theta,thetaprime=y
    return theta
passage_origine.terminal = False #pour poursuivre l'intégration
passage_origine.direction = 1 #pour ne compter que les passages avec theta croissant
```

On précise les caractéristiques physiques du système.

```
longueur = .4 #m
g0 = 9.8 #m/s^2
omega0 = np.sqrt(g0/longueur) #rad/s
T0 = 2*np.pi/omega0

tau_min = 0
tau_max = 5 #périodes T0

theta0 = -np.pi/2 #angle initial (rad)
v0 =  0 #vitesse (m/s)
thetaprime0 = v0/(longueur*T0) # (rad)
CI = [theta0,thetaprime0]

```

On effectue la résolution numérique. On a forcé le pas d'intégration à ne pas être trop grand avec l'option `max_step` car le choix par défaut de l'algorithme crée des courbes qui paraissent discontinues. On aurait également pu utiliser l'option `dense_output` qui crée à partir de l'intégration une fonction continue en l'interpolant par morceaux.

```
pendule = solve_ivp(systdiff,[tau_min,tau_max], CI,max_step= T0/50,events=
    passage_origine)
angles = pendule.y[0] #en rad
anglesDeg = angles*180/np.pi #en deg
instantsAdim = pendule.t #en unités de T0
instants = instantsAdim*T0 #en s
vitessesAngAdim = pendule.y[1] #en unités de 1/T0
vitesses = vitessesAngAdim*longueur/T0 #en m/s
```

On vérifie que le mouvement est périodique, car la durée séparant deux évènements consécutifs est bien constante, mais que les oscillations sont anharmoniques car elle est supérieure, pour $\theta_0 = \pi/2$ à sa valeur pour $\theta \ll 1$.

```
f'période pour theta0 = {theta0*180/np.pi} deg:
    {np.mean(np.diff(pendule.t_events[0]*T0))} s' #np.diff calcule la différence des
    termes consécutifs de la liste
```

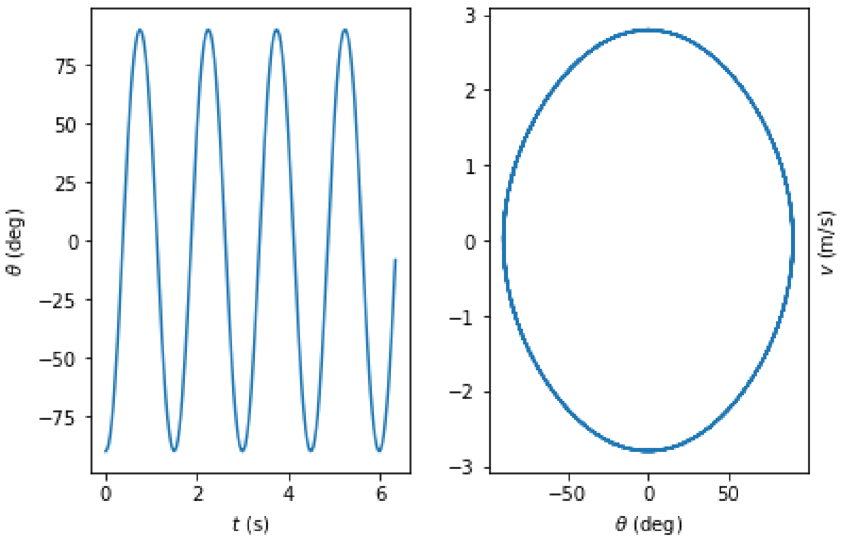
```
'période pour theta0 = -90.0 deg: 1.498318470420248 s'
```

```
f'période des petits angle : {T0} s'
```

```
'période des petits angle : 1.2693951251881046 s'
```

On trace ensuite l'évolution temporelle et la trajectoire dans l'espace des phases.

```
fig,(axtemp,axphase) = plt.subplots(1,2)
fig.tight_layout()
axtemp.plot(instants,anglesDeg)
axphase.plot(anglesDeg,vitesses)
axtemp.set_xlabel(r"$t$ (s)")
axtemp.set_ylabel(r"$\theta$ (deg)")
axphase.set_xlabel(r"$\theta$ (deg)")
axphase.set_ylabel(r"$v$ (m/s)")
axphase.yaxis.set_label_position("right")
fig.show()
```



IV Questions du DM07

IV.1 3a

IV.2 3b

IV.3 3c

IV.4 3d